A VALÓS SZÁMOK TIZEDESTÖRTKÉNT VALÓ BEVEZETÉSE

HERBERT LUGOWSKI

Az (5) alatti dolgozatban a nem-negatív racionális számok Q_+ félteste bevezetésénél egy olyan strukturális leírást tárgyaltunk, amely a tanításban alkalmazott aritmetikán kívüli indoklást és az aritmetika belső sajátosságaiból adódó eljárást egyaránt tartalmazza. Ez a tanár szakmai tájékozottságát szolgálja, ami a módszertani felkészültségének az alapja. Ebben a dolgozatban azt mutatjuk meg, hogy teljesen hasonlóan lehetséges a Q_+-nak a nem-negatív valós számok R_+ féltestévé való bővítése. Rövidség kedvéért a teljes részletezéstől eltekintünk, s csak az elvi meggondolások vázolására korlátozódunk. Megjegyezzük azonban, hogy a szükséges részletbizonyítások viszonylag könnyen elvégezhetők.

1. Aritmetikán kívüli motiváció

Kiindulási pontunk annak megállapítása, hogy az [5]-ben tekintett

$$f_{Q_+}\colon Q_+ \to S(a \mapsto a\varepsilon)$$

leképezés, amely Q_+-t egy g egyenes egybevágó szakaszaiból álló osztályainak természetesen rendezett S félmodulusába képezi le, s minden $a(\in Q_+)$-hoz az $e=\overline{OE}$ egységszakasznak az $a\varepsilon$ törtszámú többszörösét rendeli, nem szürjektív.

Ismert például, hogy az egységnégyzetnek a ξ átlója itt nem fordul elő képként. Hogy ennek okát megmagyarázhassuk, vezessük be a rendezett halmazok elméletéből a következő fogalmakat.

Egy rendezett $(M, <)$ halmazban ennek két nemüres X és X' részhalmaza egy (X/X') *szeletpárt* alkot M-ben, ha minden $x\in X$, $x'\in X$ esetén $x\leqq x'$ teljesül (röviden $X\leqq X'$). *Dedekind-szelet* (röviden *D-szelet*) egy olyan (X/X') szeletpár, amelyre $X\cap X'=\emptyset$ és $X\cup X'=M$. Az $s\in M$ elem az (X/X')-nek *szeleteleme*, ha $X\leqq s\leqq X'$. Ha s egyértelműen meghatározott, akkor ezt $s\triangleq(X/X')$ jelöli. Az M halmazt *sűrű*nek mondjuk, ha minden olyan $a, b\in M$ elemhez, amelyre $a<b$ teljesül, létezik olyan $x\in A$, amelyre $a<x<b$ teljesül. M-et *folytonos*nak mondjuk, ha M sűrű és M-ben minden (X/X') szeletpárnak van szeleteleme M-ben. (Megemlítjük, hogy ezzel ekvivalens az, hogy minden D-metszetnek M-ben van metszeteleme, ill, hogy M minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának van szuprémiuma M-ben, ill. hogy M minden nemüres, alulról korlátos részhalmazának van infimuma M-ben.)

A geometria szisztematikus felépítésével megkövetelt Cantor—Dedekind-féle folytonossági axióma szerint $(S, <)$ folytonos halmaz; $(Q_+, <)$ azonban nem folytonos, mivel például az

$$X := \{x | x \in Q_+ \wedge x^2 < 2\}, \quad X' := \{x | x \in Q_+ \wedge x^2 > 2\}$$

részhalmazokból álló (X, X') szeletpárnak Q_+-ban nincs szeleteleme, így az előbb említett $\xi \in S$ szakasz nem racionálisan mérhető. Ez motiválja Q_+-nak egy folytonos A számhalmazzá való bővítését, amelynek a struktúráját úgy kell megkonstruálni, hogy S a Q_+ félmodulusból (l. [2]-t) A-félmodulussá váljék, tehát a következő többszörözési szabályok teljesüljenek (α, $\beta \in S$; $a, b \in A$; $S^* = S / \{0\}$, $A^* = A / \{0\}$):

V1 $\alpha = \beta \Leftrightarrow a\alpha = a\beta \quad (a \in A^*)$,

V2 $\alpha < \beta \Leftrightarrow a\alpha < a\beta \quad (a \in A^*)$,

V3 $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$,

V4 $a = b \Leftrightarrow a\alpha = b\alpha \quad (\alpha \in S^*)$,

V5 $a < b \Leftrightarrow a\alpha < b\alpha \quad (\alpha \in S^*$

V6 $(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$,

V7 $(a \cdot b)x = a(b\alpha)$.

A következőkben alkalmazzuk azt a struktúraelméleti tételt, amely szerint mindent természetesen rendezett folytonos $A = (A, <, +)$ félmodulus (például S) a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. A archimédeszi, azaz az $\alpha \in A$ és $\beta \in A^*$ elemekhez van olyan $n \in N^*$, amelyre $n\beta = \alpha$.
2. A osztható, azaz $\alpha \in A$ és $n \in N^*$ elemekben létezik olyan $\xi \in A$, amelyre $n\xi = \alpha$; ennélfogva A Q_+-félmodulus.
3. Minden $\alpha \in A^*$ elemre a $Q_+\alpha := \{r\alpha' r \in Q_+\}$ részhalmaz sűrű A-ban, azaz ha $\xi, \eta \in A$, és $<\eta\xi$, akkor létezik olyan $r \in Q_+$, amelyre $\xi < r\alpha < \eta$.

2. Végtelen tizedestörtek mint mérőszámok

Már a racionális számok tízes számrendszerbeli előállításához szükségünk van az $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$; végtelen tizedestört fogalmára, amin egyszerűen az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $(0 \leqq a_i \leqq 9;\ i \geqq 1)$ természetes számok egy sorozatát értjük. Az összes (9-es periódus nélküli) végtelen tizedestörtek halmazát R_+ jelöli. Ismert, hogy minden $\frac{m}{n} \in Q_+$ törtnek egy osztási algoritmussal megfeleltethetünk egy

$$D\left(\frac{m}{n}\right) = a_0, \quad a_1 \ldots a_l \overline{b_1 \ldots b_k} \in R_+,$$

szakaszos tizedestörtet és a D: $Q_+ \to R_+$ $\left(\frac{m}{n} \to D\left(\frac{m}{n}\right)\right)$ leképezés injektív, továbbá ha $\dfrac{m}{n}$-et azonosítjuk $D\left(\dfrac{m}{n}\right)$-nel, akkor Q_+ beágyazható R_+-ba. Minden $a\in R_+$ tizedestörthöz van egy

$$s_n = a_0+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_n}{10^n} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

alsó közelítő tört, és egy

$$s_n' = s_n+\frac{1}{10^n} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

felső közelítő tört. Ezt így jelöljük: $a \triangleq (s_n/s_n')$.

Érvényesek a következők:

1. $s_0 \leqq s_1 \leqq s_2 =$ *(monoton növekvő sorozat)*,
2. $\ldots \leqq s_2' \leqq s_1' \leqq s_0'$ *(monoton csökkenő sorozat)*,
3. $s_n < s_m'$ *minden n, m-re;*
4. *minden* $t\in Q_+^*$*-hoz létezik olyan* s_n *és* s_n', *hogy* $s_n' - s_n < t$.

Az (s_n) és az (s_n') sorozatok tehát egy szeletpárt alkotnak Q-ban, és az $a\in Q_+$ esetben ennek a szeletpárnak egyetlen szeleteleme az a, erre tehát mint egyetlen Q_+-beli elemre teljesül

$$\forall n \ (s_n \leqq a \leqq s_n'),$$

és ezzel S-ben mint Q_+-félmodulusban az $\alpha\in S$ elemre

$$(*) \qquad \forall n \quad (s_n\alpha \leqq a\alpha \leqq s_n').$$

Megmutatható, hogy ez általánosítható úgy, hogy minden $\gamma\in S$ szakaszt egy tetszőleges $\alpha\in S$ szakaszra nézve egy egyértelműen meghatározott $a\in R_+$ tizedestörttel mérjünk:

(2a) *tétel.*

$$S\forall\gamma\in S\exists!!a\in R_+\forall n\in N \quad (s_n\alpha \leqq \gamma \leqq s_n'\alpha).$$

Megfordítva, minden $\alpha\in S^*$-hoz és minden $a\in R_+$-hoz pontosan egy $\gamma\in S$ létezik, amely minden n-re kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

(2b) *tétel.*

$$\forall\alpha\in S\forall a\in R_+\exists\gamma\in S\forall n\in N \quad (s_n\alpha \leqq \gamma \leqq s_n'\alpha).$$

Ennélfogva γ az S-beli $(s_n\alpha)$ és $(s_n'\alpha)$ sorozatból képezett szeletpárnak egyértelműen meghatározott szeleteleme; ezért ezt röviden így írjuk: $\gamma \triangleq (s_n\alpha/s_n'\alpha)$ és γ-t az α elem a-szorosának nevezzük;

(2c) *definíció.*

$$\gamma = a\alpha :\Leftrightarrow a \triangleq (s_n/s_n') \wedge \gamma \triangleq (s_n\alpha/s_n'\alpha).$$

(2a) és (2b)-ből, valamint az S-beli összeadás monotonitásából közvetlenül következik a V4 és V3 és ezzel együtt a V2 és V1 is. A $(*)$ képlet $a\in Q_+$-ra vonatkozóan azt mutatja, hogy a (2c)-ben definiált operátorszorzat $Q_+ (\subset R_+)$-ra ugyanaz, mint korábban. Ezzel kapjuk a következő tételt:

(2d) *tétel. Az* f_{R+}: $R_+ \to R_+ \varepsilon = S$ $(a \mapsto a\varepsilon)$ *leképezés bijektív és az* f_{Q+} *leképezés kiterjesztése, tehát a számegyenes pontjaihoz kölcsönösen egyértelműen rendelhetők az* R_+*-beli végtelen tizedestörtek.*

3. $\mathbf{R}_+$ rendezése

Célunk az R_+-ban egy rendezés bevezetése, amely kielégíti V5-öt. Ehhez először (a Q_+-beli, ill. Q-beli eljárásához hasonlóan) az $a\alpha < b\alpha$ állítást írjuk le az $a = a_0, \ldots a_1 a_2 \ldots$ $b = b_0, b_1 b_2, \ldots \in R_+$ segítségével.

(3a) *tétel.*

(i) $$a\alpha < b\alpha \Leftrightarrow \exists n \ (a_0 = b_0, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}, \ a_n < b_n), \quad (\alpha \neq 0).$$

Ez a tétel aritmetikán kívüli motivációt nyújt az R_+-beli rendezéshez.

(3b) *definíció.*

(j) $$a < b :\Leftrightarrow \exists n \ (a_0 = b_0, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n < b_n).$$

Így kapjuk a következőt:

(3c) *tétel. A (j)-ben definiált reláció irreflexív rendezési reláció R_+-ban, amely ún. lexikografikus rendezés, és a Q_+-beli rendezés kiterjesztése.*

(3d) *következmény. S-ben R_+-ra vonatkozóan teljesül* V5, *azaz az f_{R+} leképezés rendezéstartó.*

(3e) *tétel. R_+ folytonos halmaz, amelyben Q_+ sűrű.*

(3_1) *kiegészítés. Az R_+-ban minden $a \triangleq s_n/s_n'$) tizedestört az (s_n) és (s_n') sorozatokból ill. közelítő törtjeiből képezett szeletpárnak egyértelműen meghatározott szeleteleme: $a \triangleq (s_n/s_n')$.*

A (3c)—(3f) állítások bizonyítása közvetlenül adódik (3a)-ból anélkül, hogy az aritmetikán kívüli $(S, <)$ tartomány megfelelő tulajdonságait átvisszük $(R_+, <)$-ra. Ezeket az állításokat — aritmetikán kívüli eszközöktől függetlenül — szeretnénk aritmetikán belüli felépítés céljából megkapni, ami némi fáradsággal (különösen (3c)-re tekintettel) lehetséges is. Ez a megállapítás azért különösen jelentős, mert ezáltal R_+ előállítása során tisztán halmazelméletileg egy folytonos halmazt konstruálunk, míg S-nek a folytonossága egy geometriai axióma.

Teljesség kedvéért $(R_+, <)$-nak mint a $(Q_+, <)$-t tartalmazó folytonos halmaznak algebrai jellemzéséhez egy megjegyzést kívánunk füzni.

(3g) *tétel. A Q_+-t tartalmazó folytonos A halmazra a következő állítások ekvivalensek:*

1. *$(A, <)$ izomort* $(R_+, <)$-val.
2. *A az R_+-t tartalmazó minimális folytonos halmaz.*
3. *A-nak nincs maximuma, és Q_+ sűrű A-ban.*
4. *Mindegyik a $(\in A)$ elem egy Q_+-beli $(X/X') \in D$-szeletnek szeleteleme, és mindegyik Q_+-beli D-szeletnek pontosan egy szeleteleme van A-ban.*
5. *Mindegyik $a (\in A)$ elem Q_+ nemüres részhalmazainak szupremuma és infimuma.*

4. Összeadás és szorzás $\mathbf{R}_+$-ban

Célunk olyan összeadás és szorzás bevezetése R_+-ban, amelyik V6-ot és V7-et kielégíti. E célból először az $a\alpha + b\alpha$ és $a(b\alpha)$ kifejezéseket írjuk le:

(4a) *tétel. Legyen $a \triangleq (s_n/s_n')$ és $b \triangleq (t_n/t_n')$. Érvényesek a következők:*

(ii) $a\alpha + b\alpha = c\alpha \Rightarrow c = (s_n + t_n/s_n' + t_n')$,

(iii) $a(b\alpha) = d \Rightarrow d = (s_n \cdot t_n/s_n' \cdot t_n')$.

Ennek a tételnek a bizonyításánál és a későbbiekben is a nehézségek abban mutatkoznak meg, hogy bár az

$$(s_n+t_n)\alpha \leqq c\alpha \leqq (s'_n+t'_n)\alpha, \quad (s_n t_n)\alpha \leqq d\alpha \leqq (s'_n t'_n)\alpha$$

állításokat rögtön megkapjuk, azonban s_n+t_n és $s'_n+t'_n$, ill. $s_n t_n$ és $s'_n t'_n$ nem szükségképpen egy tizedestörtnek közelítő törtje, amiért c ill. d egyértelműségét (2b)-től függetlenül kell igazolni. Hasznos segédeszközként vezessük be ehhez az általánosított szelet fogalmát:

(4b) *definíció.* Egy (X/X') szeletpárt általánosított szeletnek (V-szeletnek) nevezünk Q_+-ban, ha mindegyik $t(\in Q_n^*)$-hez léteznek olyan $x\in X$ és $x'\in X'$ elemek, amelyekre $0\leqq x'-x<t$ teljesül.

(4c) *következmény.*

1. *(s_n/s'_n) egy V-szelet Q_+-ban,*
2. *Mindegyik Q_+-beli V-szeletnek van pontosan egy szeleteleme R_+-ban.*
3. *Ha (X/X') és (Y/Y') Q_+-beli V-szelet, akkor $(X+X'/Y+Y')$ és $(XY/X'Y')$ is az.*

Ezek az állítások nagyobb nehézségek nélkül következnek, és adják (4a) bizonyítását, ugyanakkor az R_+-beli összeadás és szorzás aritmetikán kívüli motivációját szolgáltatják:

(4d) *definíció*

(jj) $a+b \triangleq (s_n+t_n/s'_n+t'_n)$,

(jjj) $a\cdot b \triangleq (s_n t_n/s'_n t'_n)$.

(4e) *tétel. A (j)—(jjj) definíciók alapján kapjuk a Q_+-nak egy természetesen rendezett folytonos $R_+=(R_+, <, +, \cdot)$ féltestbővítését.*

A (4e) bizonyítása azt az előzetes meggondolást igényli, hogy (*jj*) és (*jjj*) független attól, hogy az a, b szeletelemet mely V-szeletből választjuk. A bizonyítás azonban nagyon aprólékos és természetesen tisztán aritmetikai. Egyébként az iskolai helyzetre való tekintettel itt előforduló aritmetikán kívüli motivációt a megszokott módon tisztán aritmetikaivá alakíthatjuk, miközben a következő struktúratételt mondjuk ki.

(4g) *tétel. Legyen A egy természetesen rendezett folytonos féltest, amely tartalmazza Q_+-t. Ekkor*

$$\varphi\colon R_+ \to A \quad (a \triangleq (s_n/s'_n) \mapsto a \triangleq (s_n/s'_n))$$

bijektív leképezés, amely Q_+-t azonosan képezi le, és érvényes:

(i) $a^*<b^* \Leftrightarrow \exists n\,(a_0=b_0, \dots, a_{n-1}=b_{n-1}, a_n<b_n)$,

(ii) $a^*+b^* \triangleq (s_n+t_n/s'_n+t'_n)$,

(iii) $a^*\cdot b^* \triangleq (s_n\cdot t_n/s'_n\cdot t'_n)$.

A bizonyítás hasonlóan végezhető el, mint a (3a), (4a) tételnél, ha $\alpha\in S$ helyett az $1\in A$ elemet tekintjük.

Végül az R_+-nak algebrai jellemzését adjuk:

(4h) *tétel. Az $A=(A, <, +, \cdot)$ struktúrára az alábbiak ekvivalensek:*

1. *A izomorf R_+-szal;*
2. *A a Q_+-t tartalmazó minimális folytonos féltest;*
3. *A a Q_+-t tartalmazó rendezett féltest, amelyre $(A, <)$ a $(Q_+, <)$-t tartalmazó minimális folytonos halmaz;*

4. *A természetesen rendezett folytonos féltest, amely tartalmazza Q_+-t;*
5. *A minimális folytonos féltest;*
6. *A természetesen rendezett, folytonos féltest.*

IRODALOM

[1] LUGOWSKI, H.: Strukturdenken in der Schulmathematik, Math. i.d. Schule *9* (1971) Heft 11, S. 663—672.
[2] LUGOWSKI, H.: Zur Motivierung von Zahlenbereichserweiterungen, Greifswalder Kolloquium 29. 2, 1980, S. 13—25.
[3] LUGOWSKI, H.: Zur Einführung der rationalen Zahlen, Berliner Kolloquium 22. 1. 1981, S. 29—40.
[4] LUGOWSKI, H.: Zur Einführung der reellen Zahlen als Dezimalbrüche, Leipziger Kolloquium 1. 4. 1982, S. 33—39.
[5] LUGOWSKI, H.: A Számbővítés motivációjáról, Acta Acad. Paed., Szeged 1982. Vol. II. S. 141—152.

ZUR EINFÜHRUNG DER REELLEN ZAHLEN ALS DEZIMALBRÜCHE

H. LUGOWSKI

Im dem vorhergehenden Artikel [5] erfolgte eine strukturelle Beschreibung der außerarithmetischen Argumentation im Schulunterricht und des innerarithmetischen Vorgehens bei der Einführung des Halbkörpers Q_+ der nichtnegativen rationalen (gebrochenen) Zahlen. Wir zeigen, wie sich die Erweiterung von Q_+ zum Halbkörper R_+ der nichtnegativen reellen Zahlen unter völlig analogen Gesichtspunkten vollziehen läßt.

ВВЕДЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ К КАЧЕСТВЕ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

ГЕРБЕРТ ЛУГОВСКИ

В работе под (5) при введении полутела Q_+ не-негативных рациональных чисел мы расматриваем такое структурное описание, которое в одинаковой мере содержит как аргументацию за пределами арифметики, так и метод, вытекающий из внутренних свойств арифметики, используещея в процессе преподавания математики. В данной работе мы показываем, что совершенно аналогичным образом возможно расширение Q_+ в полутело не-негативных действительных чисел.